模块二 二项式定理

第 1 节 求展开式中某项的系数（★★）

强化训练

1．（2020·北京卷·★）在$(\sqrt{x}-2)^5$的展开式中，x^2的系数为_____.

答案：-10

解析：要求x^2的系数，先写出展开式的通项，$T_{r+1}=C_5^r(\sqrt{x})^{5-r}(-2)^r=(-2)^rC_5^rx^{\frac{5-r}{2}}$，其中$r=0,1,2,\cdots,5$，

令$\frac{5-r}{2}=2$可得$r=1$，所以展开式中含x^2的项为$T_2=(-2)^1C_5^1x^2=-10x^2$，其系数为$-10$.

2．（2020·新课标III卷·★）$(x^2+\frac{2}{x})^6$的展开式中常数项是_____.（用数字作答）

答案：240

解析：要求常数项，先写出展开式的通项，由题意，$T_{k+1}=C_6^k(x^2)^{6-k}(\frac{2}{x})^k=2^kC_6^kx^{12-3k}(k=0,1,\cdots,6)$，

令$12-3k=0$得：$k=4$，所以展开式的常数项为$T_5=2^4C_6^4=240$.

3．（2020·新课标I卷·★★）$(x+\frac{y^2}{x})(x+y)^5$的展开式中，x^3y^3的系数为（　　）

（A）5　（B）10　（C）15　（D）20

答案：C

解析：$(x+\frac{y^2}{x})$这部分次数较低，可用乘法分配律拆成两部分，分别求含x^3y^3的项，

$(x+\frac{y^2}{x})(x+y)^5=x(x+y)^5+\frac{y^2}{x}(x+y)^5$，其中$(x+y)^5$展开式的通项$T_{k+1}=C_5^kx^{5-k}y^k(k=0,1,\cdots,5)$ ①，

先看$x(x+y)^5$这部分，要产生x^3y^3，应取$(x+y)^5$的展开式中x^2y^3这一项，

令$\begin{cases}5-k=2\\k=3\end{cases}$可得$k=3$，代入①得$T_4=C_5^3x^2y^3=10x^2y^3$，所以$x(x+y)^5$的展开式中含$x^3y^3$的项为$xT_4=10x^3y^3$；

再看$\frac{y^2}{x}(x+y)^5$这部分，要产生x^3y^3，应取$(x+y)^5$的展开式中x^4y这一项，

令$\begin{cases}5-k=4\\k=1\end{cases}$可得$k=1$，代入①得$T_2=C_5^1x^4y=5x^4y$，所以$\frac{y^2}{x}(x+y)^5$的展开式中含$x^3y^3$的项为$\frac{y^2}{x}T_2=5x^3y^3$；

综上所述，$(x+\frac{y^2}{x})(x+y)^5$的展开式中x^3y^3的系数为$10+5=15$.

4．（2023·辽宁模拟·★★★）$(1+3x)^6(1-x)^3$的展开式中x^2的系数为_____.

答案：84

解析：相乘的两项次数都较高，不便于拆成几部分来分析，故写出两项各自的通项来看，

$(1+3x)^6$ 和 $(1-x)^3$ 的展开通项分别为 $T_{r+1}=C_6^r(3x)^r=3^rC_6^rx^r(r=0,1,2,\cdots,6)$，$P_{k+1}=C_3^k(-x)^k=(-1)^kC_3^kx^k(k=0,1,2,3)$，

所以 $T_{r+1}P_{k+1}=3^rC_6^rx^r\cdot(-1)^kC_3^kx^k=(-1)^k3^rC_6^rC_3^kx^{r+k}$，要求 x^2 的系数，故分析怎样能使 $r+k=2$ 即可，

令 $r+k=2$ 可得：$\begin{cases}r=0\\k=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}r=1\\k=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}r=2\\k=0\end{cases}$，对应的项分别为 $T_1P_3=(-1)^23^0C_6^0C_3^2x^2=3x^2$，

$T_2P_2=(-1)^13^1C_6^1C_3^1x^2=-54x^2$，$T_3P_1=(-1)^03^2C_6^2C_3^0x^2=135x^2$，故所求 x^2 的系数为 $3+(-54)+135=84$.

5.（2023・辽宁模拟・★★★）若 $(x-\sqrt{x})^2(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x^2})^n$ 的展开式中存在常数项，则正整数 n 的一个值可以为_____.

答案： 1（答案不唯一，见解析）

解析： 先写出两部分各自的通项，$(x-\sqrt{x})^2$ 的展开通项为 $T_{r+1}=C_2^rx^{2-r}(-\sqrt{x})^r=(-1)^rC_2^rx^{2-\frac{r}{2}}(r=0,1,2)$，

$(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x^2})^n$ 的展开通项为 $P_{k+1}=C_n^k(\sqrt[3]{x})^{n-k}(\frac{1}{x^2})^k=C_n^kx^{\frac{n-7k}{3}}(k=0,1,2,\cdots,n)$，

所以 $T_{r+1}P_{k+1}=(-1)^rC_2^rx^{2-\frac{r}{2}}\cdot C_n^kx^{\frac{n-7k}{3}}=(-1)^rC_2^rC_n^kx^{2-\frac{r}{2}+\frac{n-7k}{3}}$，要使展开式中存在常数项，则 $2-\frac{r}{2}+\frac{n-7k}{3}$ 可为 0，

令 $2-\frac{r}{2}+\frac{n-7k}{3}=0$ 可得 $n=\frac{3r}{2}-6+7k$，其中 r 只有 3 个值可取，分别代入分析即可，

当 $r=0$ 时，$n=7k-6$，此时 k 取任意正整数，得到的 n 都满足题意，例如取 $k=1$ 可得 $n=1$，满足要求；

当 $r=1$ 时，$n=7k-\frac{9}{2}$，此时 n 不是整数，不合题意；

当 $r=2$ 时，$n=7k-3$，此时 k 取任意正整数，得到的 n 都满足题意，例如取 $k=1$ 可得 $n=4$，满足要求；

综上所述，n 的取值集合为 $\{n\,|\,n=7k-6$ 或 $7k-3,k\in\mathbf{N}^*\}$.

6.（2023・永州二模・★★）$(x+\frac{1}{x}-2)^5$ 的展开式中含 x^2 的项为_____.

答案： $-120x^2$

解析： 观察发现通分可化完全平方式处理，$(x+\frac{1}{x}-2)^5=(\frac{x^2-2x+1}{x})^5=\frac{[(x-1)^2]^5}{x^5}=\frac{(x-1)^{10}}{x^5}$，

注意到分母为 x^5，故要求展开式中 x^2 的系数，应考虑分子展开式中含 x^7 的这一项，

$(x-1)^{10}$ 的展开通项为 $T_{r+1}=C_{10}^rx^{10-r}(-1)^r=(-1)^rC_{10}^rx^{10-r}(r=0,1,2,\cdots,10)$，

令 $10-r=7$ 可得 $r=3$，所以 $T_4=(-1)^3C_{10}^3x^7=-120x^7$，故 $(x+\frac{1}{x}-2)^5$ 的展开式中含 x^2 的项为 $\frac{T_4}{x^5}=-120x^2$.

7.（2023・浙江模拟・★★★）$(x+\frac{2}{x}-y)^7$ 的展开式中 xy^4 的系数为_____.

答案： 210

解析： 利用三项展开原理解答，将原式写成 7 项之积，

$(x+\frac{2}{x}-y)^7=(x+\frac{2}{x}-y)(x+\frac{2}{x}-y)\cdots(x+\frac{2}{x}-y)$，

由于 $x+\frac{2}{x}-y$ 中 y 只出现一次，故要产生 xy^4，只能 7 个 $(x+\frac{2}{x}-y)$ 中有 4 个取 $-y$，剩余 3 个里面，2 个取 x，1 个取 $\frac{2}{x}$，得到的才是 xy^4，

展开式中含 xy^4 的项为 $C_7^4(-y)^4C_3^2x^2C_1^1\frac{2}{x}=210xy^4$，故其系数是 210.

8.（2023 • 大庆模拟 • ★★★）$(x-\frac{2}{x}-1)^5$ 的展开式中的常数项为（　　）

（A）-81　　（B）-80　　（C）80　　（D）161

答案：A

解析：$x-\frac{2}{x}-1$ 无法变形为完全平方式，可利用三项展开式的原理，分析相乘的 5 个 $x-\frac{2}{x}-1$ 中 x，$-\frac{2}{x}$ 和 -1 分别取几个，相乘后恰为常数，

$(x-\frac{2}{x}-1)^5=(x-\frac{2}{x}-1)(x-\frac{2}{x}-1)(x-\frac{2}{x}-1)(x-\frac{2}{x}-1)(x-\frac{2}{x}-1)$，

要使展开式中 x 的次数为 0，上式的五个 $(x-\frac{2}{x}-1)$ 中取 x，$-\frac{2}{x}$ 和 -1 的个数有下面几种情况：

①不取 x 和 $-\frac{2}{x}$，全部取 -1，这样得到的项为 $C_5^5(-1)^5=-1$；

②取 1 个 x，1 个 $-\frac{2}{x}$，3 个 -1，这样得到的项为 $C_5^1x\cdot C_4^1(-\frac{2}{x})\cdot C_3^3(-1)^3=40$；

③取 2 个 x，2 个 $-\frac{2}{x}$，1 个 -1，这样得到的项为 $C_5^2x^2\cdot C_3^2(-\frac{2}{x})^2\cdot C_1^1(-1)^1=-120$；

综上所述，$(x-\frac{2}{x}-1)^5$ 的展开式中的常数项为 $-1+40+(-120)=-81$.

9.（2023 • 宁波十校联考 • ★★★）已知 $(1+x)(1-2x)^6=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_7(x-1)^7$，则 $a_2=$______.

答案：132

解析：所给展开式是按 $x-1$ 展开的，为了便于观察，可将 $x-1$ 换元，化为我们熟悉的形式，

令 $t=x-1$，则 $x=t+1$，代入原式化简得：$(t+2)(2t+1)^6=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_7t^7$ ①，

式①左侧 $t+2$ 的次数较低，可用乘法分配律拆成两部分分别求展开式中含 t^2 的项，

$(t+2)(2t+1)^6=t(2t+1)^6+2(2t+1)^6$，且 $(2t+1)^6$ 的展开通项 $T_{r+1}=C_6^r(2t)^{6-r}=2^{6-r}C_6^rt^{6-r}(r=0,1,\cdots,6)$，

先看 $t(2t+1)^6$ 这部分，要产生 t^2，应取 $(2t+1)^6$ 的展开式中含 t 的项，

令 $6-r=1$ 可得 $r=5$，所以 $T_6=2C_6^5t=12t$，故 $t(2t+1)^6$ 的展开式中含 t^2 的项为 $12t^2$，

同理，$2(2t+1)^6$ 的展开式中含 t^2 的项为 $2T_5=2\times2^2C_6^4t^2=120t^2$，

所以 $(t+2)(2t+1)^6$ 的展开式中含 t^2 的项为 $12t^2+120t^2=132t^2$，故 $a_2=132$.